2006/9/4 更新

2 次関数

A $y = ax^2$ のグラフ

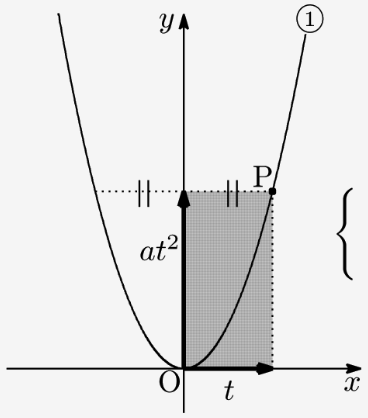
2 次関数

$$y = ax^2 \ (a \neq 0) \qquad \cdots ①$$

において，x が 0 から t だけ変化するとき，y は 0 から at^2 だけ変化する．

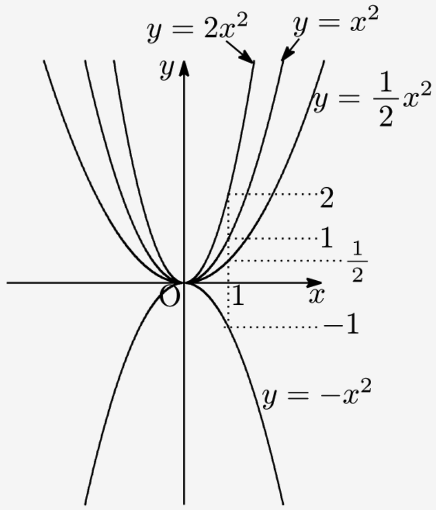
t	-3	-2	-1	0	1	2	3
at^2	$9a$	$4a$	a	0	a	$4a$	$9a$

よって $y = ax^2$ のグラフは y 軸に関して対称であり，下図のようになる．



$$\begin{cases} \text{軸}: y \text{ 軸 } (x=0) \\ \text{頂点}: \mathrm{O}(0,0) \end{cases}$$

a の値に応じて，グラフは下図のようになる．



$$a \text{ の符号} \to \begin{cases} a > 0 \cdots \text{下に凸} \\ a < 0 \cdots \text{上に凸} \end{cases}$$

$$|a| \to \begin{cases} \text{大} \cdots \text{増減が急} \\ \text{小} \cdots \text{増減が緩やか} \end{cases}$$

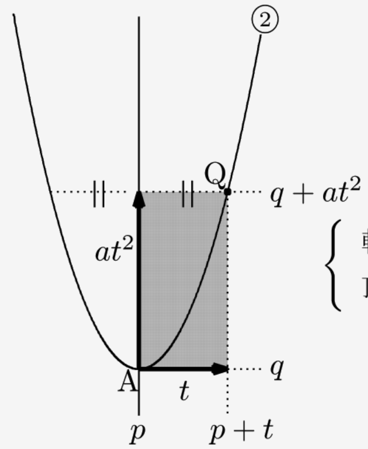
B $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

2 次関数

$$y = a(x-p)^2 + q \ (a \neq 0) \qquad \cdots ②$$

において，x が p から t だけ変化するとき，y は q から at^2 だけ変化する．

よって $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは直線 $x = p$ 軸に関して対称であり，下図のようになる．



$$\begin{cases} \text{軸}: x = p \\ \text{頂点}: \mathrm{A}(p, q) \end{cases}$$

〈注〉①，②のグラフにおいて，2 つのアミカケ長方形は合同である．すなわち，①における頂点 O に対する P の位置関係と，②における頂点 A に対する Q の位置関係は同じである．

〈注 2〉$y = ax^2 + bx + c$ を①の形に変形することを「平方完成」という．この変形により，**変数 x が 1 箇所に集約され**，変化が捉えやすくなる．

C グラフの平行移動

$\boxed{\mathrm{B}}$からわかるように，放物線②は放物線①をベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ だけ平行移動したものである．すなわち，次の法則が成り立つ．

$$①: \boxed{y} = a\,\underline{|x|}^2$$

$$\Big\downarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ だけ平行移動}$$

$$②: \boxed{y-q} = a\left(\underline{|x-p|}\right)^2$$

〈注 1〉要するに，$\underline{|\ \ |}$の中身を x から $x-p$ に，$\boxed{\ \ }$の中身を y から $y-q$ に変えればよい．この法則は，一般に曲線 $f(x,\ y) = 0$ についても成り立つ．

〈注 2〉放物線の平行移動を扱う際には，以下の 2 通りがある．

(1) 上記を用いて「放物線の方程式」を求める

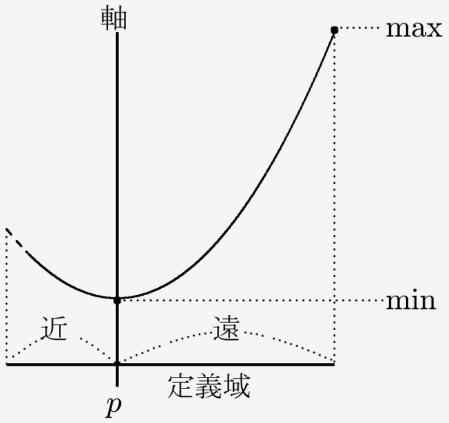
(2) とりあえず「頂点の座標」のみ考える

D 最大値・最小値

2 次関数 $f(x) := a(x-p)^2 + q \ (a > 0)$ の値は，x が p に近いほど小さく，x が p から遠いほど大きい．よって，$f(x)$ の最大値・最小値を考える際には

定義域に対する軸の位置関係のみが重要

である．



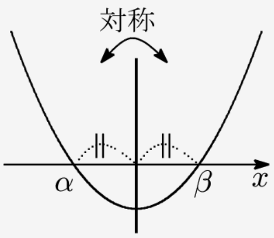
E 軸の求め方

放物線の軸の座標は，次の 3 つの形のいずれからでも瞬時に得られる．

(1) $y = a(x-p)^2 + q \to$ 軸 : $x = p$.

(2) $y = a(x-\alpha)(x-\beta) \to$ 軸 : $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
(下図参照)

(3) $y = ax^2 + bx + c \to$ 軸 : $x = \dfrac{-b}{2a}$.
(平方完成を途中までやってみればわかる)



F 解の配置

たとえば 2 次方程式

$$f(x) := x^2 - ax + 2a = 0 \qquad \cdots(*)$$

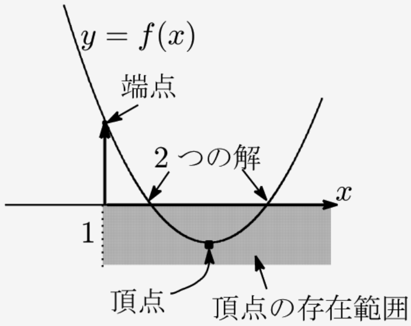
が，区間 $I : x \geqq 1$ に 2 つの実数解をもつための条件は，$(*)$ の解を $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-8a}}{2}$ と求めるよりも，$y = f(x)$ のグラフの

「端点」と「頂点」

に関する条件を定式化する方が簡単である．

$f(1) \geqq 0,$ $\cdots$**端点**

$$\left.\begin{array}{l} \text{軸} : x = \dfrac{a}{2} \geqq 1, \\ \text{判別式} = a^2 - 8a \geqq 0 \end{array}\right\} \quad \cdots \textbf{頂点}$$



〈注 1〉 重解の場合も「2 つの解」と呼ぶ習慣があるので，「判別式 > 0」ではない．

〈注 2〉 場合によっては，「端点」と「頂点」のうち一方だけで済んでしまうこともある．